

brikkerne til
regning & matematik

vækst

trin 2

Demo

preben bernitt

brikkerne
til
regning & matematik
vækst, trin 2

1. Udgave som E-bog
© 2003 by bernitt-matematik.dk
Kopiering er kun tilladt efter aftale med bernitt-matematik.dk.
Læs nærmere om dette på
www.bernitt-matematik.dk

eller kontakt nedenstående adresse.

Demo

bernitt-matematik.dk
mail@bernitt-matematik.dk
Fjordvej 6
4300 Holbæk

Til den, der skal bruge hæftet

Når noget vokser, kan det foregå mere eller mindre regelmæssigt. Dette hæfte handler om hvordan man kan bruge matematik til at beskrive regelmæssig vækst, og hvordan man med sådan en beskrivelse kan lave prognoser for den fremtidige udvikling. Ved arbejde med hæftet vil man også lære at se forskel på regelmæssig og uregelmæssig vækst.

Hæftet er lavet til den, der kender til procentregning og simpel regning med potenstal. Det kan man have fået kendskab ved at arbejde med hæftet: Tal og regning, Basis: De fire regningsarter. Det vil være en fordel, hvis man også kender til brug af formler og koordinatsystemer. Det kan man komme til, ved at have arbejdet med hæfterne: Formler og ligninger, Basis og Koordinatsystem og grafer, Basis.

Ved eksempler vises det, hvorledes man beskriver vækst i forskellige situationer og fagudtryk forklares. Derefter er der opgaver man skal løse. Til en del af opgaverne skal man bruge en lommeregner med en tast, der kan bruges til at udregne potenstal. Ved tasten står enten y^x eller x^y . Har man ikke denne tast på sin lommeregner, kan man bruge den tabel, der starter på side 27.

Det er også en fordel hvis lommeregneren har en tast med $\%$. På side 25 kan man læse, hvordan man bruger lommeregneren til vækstregning.

Man behøver ikke løse alle opgaverne: Hvis man har forstået eksemplerne og kan se, at man uden problemer kan løse opgaverne, kan man springe dem over.

Hvis man er specielt interesseret i de vækstfænomener, der har med opsparing af penge at gøre, kan man læse mere om dette i hæftet: Penge, rente og valuta 2. Vil man gerne vide mere om grafisk afbildning af vækstfænomener, kan man læse om dette i hæftet: Koordinatsystem, grafer og funktioner 2.

På side 20 er en facitliste. Der kan man se om man løser opgaverne rigtigt.

På side 22 og 23 er samlet de regneregler og fagudtryk, som arbejdet med dette hæfte indlærer. Siderne kan også bruges som en indholdsfortegnelse til hæftet fordi der ved hver regel er en henvisning til, hvor i hæftet man kan læse mere.

Lineær vækst

Eksempel 1:

Du ved at prisen for dit elforbrug beregnes sådan:

Abonnementafgift: 750,00 kr. pr. år.

Forbrugsafgift: 1,04 kr. pr. kilowatttime (Kwt).

Du vil beregne prisen for et forbrug på 4.200 Kwt.

$$\text{Pris: } 1,04 \cdot 4.200 + 750 = 5.118,00 \text{ kr.}$$

Forklaring:

Lineær vækst er den form for vækst, der kan kendes ved at væksten foregår med én bestemt størrelse hele tiden. I eksemplet er der tale om lineær vækst, fordi prisen på elforbruget vokser med 1,04 for hver kilowatttime man bruger. Hvis prisen varierede, ville der ikke være tale om lineær vækst.

Man kalder denne type vækst *lineær*, fordi den giver en ret linie, hvis man viser den i et koordinatsystem. Mere om dette på side 6.

1 Du skal på rejse til London og køber engelske pund i banken. Af notaen fremgår, at du skal betale 10,025 kr pr. pund og et vekselgebyr på 25 kr.

- Lav en tabel, der viser prisen for 10, 20, 30, 40, 50 og 100 pund.

2 Vurderingen af en grunds værdi udregnes sådan:

Fast beløb for retten til at bygge et hus: 125.000 kr.

Værdi pr. m²: 250 kr.

- Lav en tabel, der viser vurderingen for grunde med størrelser 600, 800, 1.000 og 1.200 m²

3 Du ved at en cirkels areal beregnes ved at gange dens radius med sig selv og med tallet 3,14.

- Vokser en cirkels areal lineært når man lader radius vokse?

Eksempel 2:

Du vil lave en formel, der beskriver forholdet mellem dit elforbrug og prisen. Den kunne se sådan ud:

Prisen i kr: P

Elforbrug i kilowatt-timer: E

$$P = 1,04E + 750$$

Forklaring:

Al lineær vækst kan beskrives med en formel, der ser ud som denne:

Størrelse inden vækst: S_0

Størrelsen efter n gange vækst: S_n

Vækst pr. gang: a

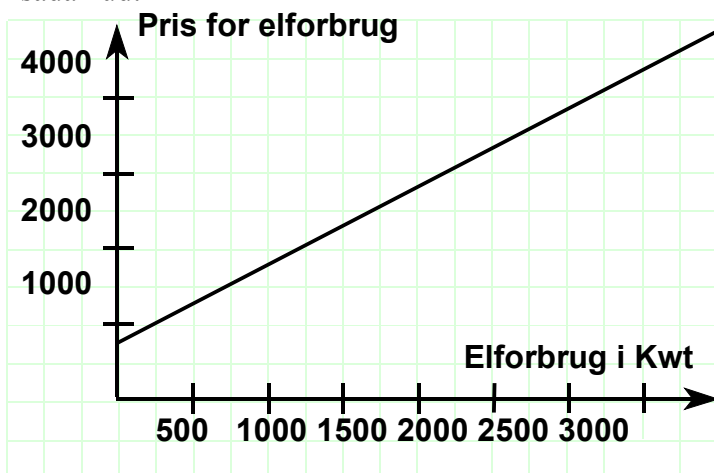
Antallet af vækst-gange: n

$$S_n = a \cdot n + S_0$$

- 1** Prisen for den benzin du køber, kan udregnes ved at gange prisen for 1 liter, der er 6,35 kr. med antallet af liter.
 - Lav en formel der beskriver sammenhængen.
- 2** Man kan beregne prisen for at bringe 1 liter vand i kog og holde det kogende på denne måde:
At bringe 1 liter vand i kog koster 1,20 kr. At holde det kogende koster 10 ører pr. minut
 - Lav en formel, der beskriver sammenhængen mellem den tid vandet skal holdes i kog og den samlede pris.
- 3** Når man skal på Internettet skal man betale et abonnement til et computerfirma og derudover telefontakst, mens man har adgang.
Et computerfirma tilbyder et abonnement på 120 kr. pr. måned og telefontaksten er 25,4 øre pr. minut.
 - Lav en formel, der viser sammenhængen mellem den samlede pris for en måneds adgang og det antal minutter, man bruger sin adgang til Internettet.

Eksempel 3:

Du vil lave en tegning, der viser hvorledes prisen på dit elforbrug afhænger af forbruget. Tegningen kunne se sådan ud:



Forklaring:

Al lineær vækst har en ret linie som graf i et koordinatsystem. Grafen starter på den lodrette akse (2. akse) i startværdien og grafen stiger herfra med en hældning, der svarer til taksten.

En lineær vækst med formlen:

$$S_n = a \cdot n + S_0$$

hvor n vises på 1. akse og S_n på 2. akse har en graf, der starter på 2. akse i tallet S_0 og har en hældning, der svarer til tallet a .

1 Betalingen for dit vandforbrug beregnes sådan:

Målerafgift: 755,00 kr.

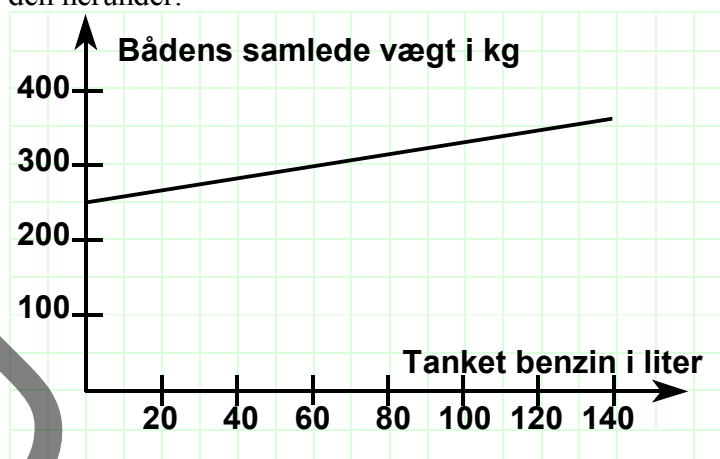
Forbrugsafgift: 18,50 kr. pr. m^3 .

- Lav en formel, der viser sammenhængen mellem dit forbrug og den samlede pris.
- Tegn et koordinatsystem, hvor forbrug op til 200 m^3 afsættes på den vandrette akse (1. akse). Prisen afsættes på den lodrette akse (2. akse).
- Tegn grafen for prisen på dit vandforbrug.

- 2 Udgiften til at have bil kan anslås på følgende måde:
Vægtafgift og forsikringer: ca. 6.000 kr.
Udgifter i øvrigt: 2,25 kr. pr. kørt km.

- Lav en formel, og vis sammenhængen i et koordinatsystem.

- 3 I instruktionsbogen til en motorbåd har du set en tegning som den herunder.



- Hvad vejer båden, når der er tanket 100 liter benzin?
- Hvor meget benzin kan man tanke, hvis båden højst må veje 300 kr?
- Hvad er grafens startværdi og hvad er dens hældning?
- Lav en formel, der beskriver sammenhængen.

- 4 Skemaet viser resultatet af en række laboratorie-forsøg med dyrkning af korn.

<i>Tilsat kvælstofgødning pr. m² i gram</i>				
0 g	1 g	2 g	3 g	4 g
<i>Høstudbytte pr. m² i gram.</i>				
10 g	15 g	20 g	25 g	30 g

- Vis forsøgsresultaterne i et koordinatsystem.
- Hvad er startværdien og hvad er hældningen?
- Skriv en formel, der viser forsøgsresultaterne.

Om lineær vækst på side 24

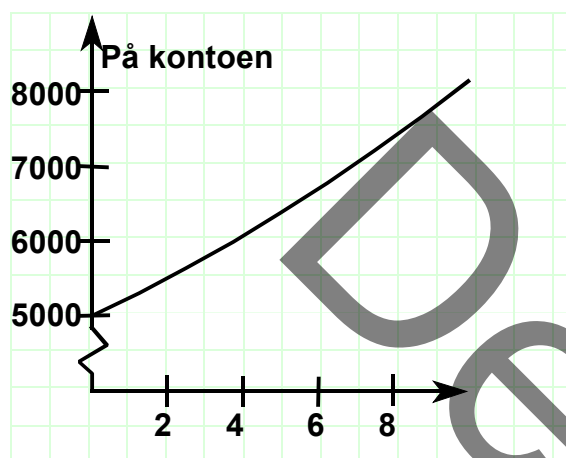
Procentvis vækst

Eksempel 1:

Du har tænkt dig at sætte 5.000 kr. på en bankkonto og lade dem stå urørt i 10 år. Banken lader dine penge vokse med 5% pr. år.

Du vil regne ud, hvad der vil stå på kontoen gennem de næste 10 år og vil vise væksten i et koordinatsystem.

Indsat:	= 5.000,00 kr.
Rente 1. år: $5.000 \cdot 5\%$	= 250,00 kr.
Efter 1. år:	= 5.250,00 kr.
Rente 2. år: $5.250 \cdot 5\%$	= 262,50 kr.
OSV....	



Forklaring:

Ved procentvis vækst bliver tilvæksten større og større.

Den nye størrelse kan beregnes sådan:

- udregn tilvæksten ved at gange med vækstprocenten og læg så tilvæksten til den oprindelige størrelse.

- 1 Efter overenskomst-forhandlinger blev det aftalt, at timelønnen i et lønområde skulle stige med 2% pr. år igennem tre år. Timelønnen var inden den skulle stige på 85,10 kr.

- Beregn timelønnen hvert af de tre år.
- Vis udviklingen i et koordinatsystem.

- 2** Folketallet i Kina steg i 1980-erne med 1,5% pr. år.
I 1980 var der 1.038 mio. indbyggere.
- Vis udviklingen frem til i dag i et koordinatsystem.
- 3** Priserne på varer og tjenester stiger i disse år med ca. 2% pr. år.
På almindelige opsparingskonti i banken kan man få ca. 4% i rente pr. år, og af renterne skal man betale op til 60% i skat.
- Hvad vil en vare, der i år koster 100 kr. koste om 5 år?
 - Hvad vil 100 kr. indsat på en bankkonto blive til efter fem år?
- 4** I en havn havde man erfaring for, at når vinden kom fra en bestemt retning og blæste med en styrke på 10 m/sek, så steg vandstanden i havnen med 10% for hver time det blæste.
Normalvandstanden ved en af kajerne var 5 m.
- Hvor mange timer kan det blæse, før vandstanden overstiger 7 meter?
- 5** Bøgetræ, der vokser under ensartede vejrforhold, har en årlig tilvækst i vægten af stammen på 35% om året i træets 10 første leveår.
Et nyplantede bøgetræ regnes for at have en stamme, der vejer 5 kg.
- Hvornår vil stammen veje 50 kg?
 - Hvad vil den veje efter 10 år?
- 6** I en byplan for en større provinsby kunne man læse, at hvis byens forretningsliv skulle kunne bevares, så skulle befolkningen stige fra 8.000 indbyggere til 10.000 indbyggere indenfor de næste 5 år.
Byen havde i årene op til dette tidspunkt haft en vækst på 5% pr. år.
- Vil man nå de 10.000 indbyggere om fem år?

Eksempel 2:

Du vil på én gang udregne, hvor meget 5.000 kr. bliver til, hvis banken giver 5% i rente pr. år og pengene står på kontoen i 10 år. Du bruger formlen:

Den nye størrelse: S_n

Den oprindelige størrelse: S_0

Vækst-procenten: a

Antallet af vækster: n

$$S_n = S_0(1 + a)^n$$

$$\text{Ny størrelse: } 5.000 \cdot (1 + 5\%)^{10} = 8.144,47 \text{ kr.}$$

Forklaring:

Formlen herover kaldes for vækst-formlen og kan bruges i alle de situationer, hvor væksten foregår med en fast procentsats.

Udtrykket $(1 + a)^n$ kan enten udregnes med lommeregner. Det kræver at den har en tast til dette (se side 25 om brug af lommeregner i vækstregning).

Man kan også bruge tabellen, der står i dette hæfte fra side 27.

- 1** Du opretter en bankkonto til dit nyfødte barn og indsætter 2.000 kr.
Banken giver 5% i rente pr. år og indsætter renterne på kontoen.
 - Brug formlen for vækst og din lommeregner til at finde hvor meget, der vil stå på kontoen når dit barn fylder 18 år.

- 2** I årene fra 1750 til 1800 voksede Danmarks befolkning med 1,5% pr. år.
I 1750 var der 713.000 indbyggere.
 - Find i tabellen der står fra side 27 værdien af $(1 + 1,5\%)^{50}$.
 - Hvad var befolkningstallet i 1800?

- 3** Du har arvet 50.000 kr. og vil sætte dem i banken, med det formål at hæve dem om 10 år.
Banken giver 4% i rente pr. år.
- Brug lommeregner eller tabel til at finde, hvad der står på kontoen efter 10 år.
- 4** I forårsmånederne øges vandstrømningen i vandløbene i Norge og Sverige.
Man regner med, at når tøbruddet sætter ind, øges vandstrømningen med 10% pr. dag.
I en elv, der ledes gennem et vandkraftværk, strømmede på det tidspunkt tøbruddet satte ind, 1 mio. liter i minuttet.
- Hvor meget vand strømmede igennem kraftværket 30 dage senere?
- 5** I starten af et nyplantede grantræs vækst vokser det med cirka 20% om året.
- Hvor højt vil et træ, der nu er 50 cm, være om 5 år?
 - Hvor højt ville det være om 50 år, hvis væksten blev ved med at være 20% pr. år?
- 6** I midten af 80-erne steg danskernes forbrug af okse- og kalvekød med 5% pr. år.
I 1984 var forbruget på 67,4 mio. kg. pr år.
- Hvis udviklingen fortsætter, hvor stort vil forbruget så blive i år 2.000?
- 7** Antallet af familier, der har en computer i hjemmet steg i starten af 90-erne med 25% om året.
Danmarks statistik gjorde sidste gang tallet op i 1994, og da havde 328.000 familier en computer.
- Hvor mange familier må man regne med har computer i dag?
 - Hvor stort et salg kan computerbranchen regne med næste år?

Eksempel 3:

Du har læst at den gennemsnitlige timeløn for faglærte arbejdere i industrien steg fra 78,20 kr. i 1982 til at være 128,80 kr. i 1992.

Du vil regne ud, hvilken årlig procentvis vækst dette har svaret til.

Hver 1-kr. er vokset til: $128,80 : 78,20 = 1,64706$

Ved opslag i tabellen der står fra side 27 ser du, at dette cirka svarer til en årlig vækst på 10 år med 5% pr. år.

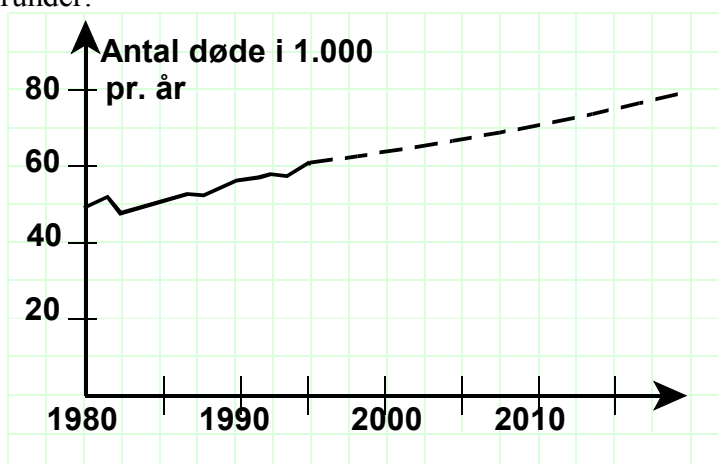
Forklaring:

Her kender man den oprindelige størrelse og slutstørrelsen samt antallet af vækstperioder (år) men ikke procenten.

Tabellen kan bruges til at finde procenten. Først udregnes hvad 1 er vokset til. Dernæst går man ind i tabellen ud for det antal vækstperioder (10 år), der er tale om og går vandret ind i tabellen, indtil man finder det tal, der ligger tættest på ens eget tal.

- 1** I perioden fra 1984 til 1994 steg den gennemsnitlige indkomst for Danmarks indbyggere fra at være hvad der svarede til 10.990\$ til at svare til 26.154\$.
I samme periode steg den gennemsnitlige indkomst i Irland fra 5.520\$ til 14.244\$.
 - Find vækstprocent for indkomsten i Danmark og i Irland.
 - Brug vækstprocenterne til at forudsige indkomsterne i de to lande i år 2000.
- 2** Prisen for en kommunal dagpleje plads var i 1984 i gennemsnit 935 kr. pr. måned og 1.434 kr. i 1994. I samme periode var den gennemsnitlige årlige lønstigningstakt på 5,2%.
 - Har lønstigningerne kunnet følge med stigningen på prisen for en dagplejeplads?

- 3 I en bog fra Danmarks Statistik har du set en tegning som den herunder:



- Hvilken årlig vækstprocent er der regnet med for perioden fra 1995 til 2020?
- 4 Det offentlige udgifter til sociale ydelser steg i perioden fra 1985 til 1995 fra at være 166,4 mia. kr. til at være 316,7 mia. kr.
- Hvilken årlig vækstprocent svarer dette til?
 - Hvad vil udgifterne være i år 2010, hvis udviklingen fortsætter?
- 5 Tabellen herunder viser værdien af industriens produktion.

Industriens produktion mia. kr.

1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
296	316	327	336	347	333	352	365

- Hvilken årlig vækstprocent svarer udviklingen fra 1988 til 1995 til?
- Er udviklingen sket med en fast procentvis vækst?

Om procentvis vækst på side 25

Negativ procentvis vækst

Eksempel 1:

Du har læst en prognose for udviklingen i antallet af fødte børn i Danmark. I 1995 blev der født 69.689 børn og prognosen siger at der skal regnes med et årligt fald i dette på 1,5% i perioden frem til år 2010.

Du vil finde, hvor mange man regner med, der bliver født i 2010.

$$\begin{aligned} \text{Fødte i 2010: } & 69.689 \cdot (1 - 1,5\%)^{15} = \\ & 69.689 \cdot 0,985^{15} = 55.553 \end{aligned}$$

Forklaring:

Man bruger også vækstformlen ved negativ vækst. I stedet for at lægge vækstprocenten til 1 trækker man den da fra 1.

Væksttabellen der står fra side 27 kan ikke bruges til negativ vækst, og man er derfor nødt til at bruge lommeregner. Har man ikke en tast med x^y er man nødt til at regne potensstallet ud ved at bruge gange-tasten. Fx skulle man i eksemplet gange 69.689 med 0,985, 15 gange efter hinanden.

- 1 I et nybygget hus er der et vist indhold i luften af det radioaktive stof Radon.
Mængden af Radon falder med ca. 17% i døgnet.
 - Hvor meget Radon er der tilbage af 10 gram efter 5 døgn?
- 2 Man regner med at det nødvendige befolkningsunderlag for en dagligvareforretning er 500 personer.
I en by var der 800 personer men antallet var de seneste år faldet med 5% pr. år.
 - Hvor mange år vil der gå før befolkningstallet falder til under 500?

3 Når medicin er optaget i kroppen nedbrydes det. Tempoet afhænger af hvilken type, der er tale om og oplyses i lægemiddelkataloger.
Medikamentet Thycapsol nedbrydes med 50% pr. døgn.
Thycapsol indtages i doser af 5 mg.

- Hvor meget er der tilbage i kroppen 5 dage efter, man har taget en dosis Thycapsol?

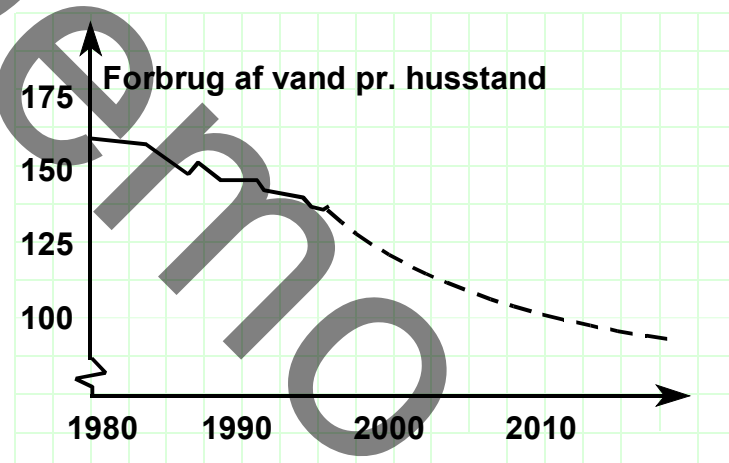
4 Forbruget af sødmælk har været faldende i de senere år. Tabellen herunder viser udviklingen:

Forbrug af sødmælk i millioner kg.

1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
268	257	242	231	226	225	221	223

- Find det procentvise fald fra 1987 til 1988.
- Er forbruget af sødmælk faldet med den samme procentdel pr. år igennem hele perioden?

5 I en avis bøger har du set en tegning som den herunder.



- Hvilken negativ vækstprocent er der regnet med for årene 1997 - 2020?

Om negativ procentvis vækst på side 26

Regelmæssig vækst?

Eksempel:

Du har set en tabel i avisen, der viser hvordan lønudviklingen har været i de seneste år. Tabellen er herunder:

Timeløn - ufaglærte i industrien

1991	1992	1993	1994	1995	1996
113,10	117,40	121,70	125,80	128,80	131,80

Du vil beskrive væksten og lave en prognose (forudsigelse) af hvad lønnen bliver i år 2000:

Væksten har ikke været regelmæssig i gennem hele perioden. Dog er lønnen i perioden 1991 - 1993 vokset lineært med en årlig tilvækst på 4,30 kr. og i perioden 1994 - 1996 med 4,00 kr. pr. år.

Hvis denne udvikling fortsætter vil lønnen i perioden 1997 - 1999 vokse med 3,70 kr. pr. år.

Forklaring:

At en vækst er regelmæssig vil sige, at den følger en bestemt formel. Det er der meget få ting i den virkelige verden der gør. Det vil dog ofte være sådan, at man med tilnærmelse kan finde en beskrivelse af sammenhængen mellem to ting - hvis der er en sammenhæng!

Ideen med at søge efter en regelmæssig sammenhæng er at kunne lave forudsigelser - prognoser - af hvordan udviklingen vil fortsætte.

1 Måling af trykket under vand har givet følgende resultater:

Dybde i m.	0	5	10	15	20	25
Tryk i atm.	1,0	1,4	2,0	2,5	3,1	3,6

- Afbild tabellens tal i et koordinatsystem.
- Beskriv sammenhængen mellem dybde og tryk.
- Hvor stort tror du trykket vil være i 50 meters dybde?

- 2 Den ydeevne batteriet i en bil har, afhænger blandt andet af temperaturen i batteriet.
Du kan se nogle eksempler på sammenhængen herunder.

Ydeevne i ampere-timer

Temperatur	-10°	-5°	0°	5°	10°	15°
Ydeevne	15	23	34	51	76	114

- Vis tabellens tal i et koordinatsystem.
- Hvilken slags sammenhæng er der?
- Hvor stor ydeevne tror du batteriet vil have, hvis temperaturen er -15°?

- 3 Antallet af domme for overtrædelse af straffeloven fremgår af skemaet herunder.

Dom for overtrædelse af straffeloven i tusinder.

1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
32,9	34,2	34,2	35,1	37,0	37,2	45,6	49,0

- Vis udviklingen i et koordinatsystem.
- Er udviklingen regelmæssig?
- Er det muligt at lave en prognose frem mod år 2000 ud fra disse oplysninger?

- 4 Når man har et antal personer og skal udvælge to, vil antallet af valgmuligheder afhænge af hvor mange personer, der er at vælge imellem.
Du kan se nogle eksempler på sammenhængen herunder.

Antal muligheder for udvælgelse af to personer

Antal personer	2	3	4	5	6	7
Antal muligheder	1	3	6	10	15	21

- Kan du regne ud, hvor mange muligheder der bliver hvis der er 10 personer at vælge imellem?